



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Ediția a XXVIII-a

ETAPA JUDEȚEANĂ – 7 martie 2026

Clasa a XII-a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

1. Aufgabe (20 Punkte)

Auf \mathbb{Z} definiert man die Verknüpfung $x * y = xy - 2x - 2y + 6$, für alle $x, y \in \mathbb{Z}$.

- Beweist, dass die Verknüpfung „ $*$ ” assoziativ und kommutativ ist;
- Bestimmt die, in Bezug auf die Verknüpfung „ $*$ ” umkehrbaren Elemente der Menge \mathbb{Z} .
- Beweist: wenn m, n und p natürliche Zahlen sind, sodass $m * n * p = 13$ und $m \leq n \leq p$, dann ist das Produkt der Zahlen m, n und p teilbar durch 13.

2. Aufgabe (20 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_3 x$.

- Bestimmt für die Funktion $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{3^{f(x)}}{x} - x$, die Stammfunktion $G: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, mit der Eigenschaft $G(2) = 2026$;
- Zeigt, dass $I = \int_1^e x f(x) dx = \frac{e^2 + 1}{4 \ln 3}$;
- Für $n \in \mathbb{N}$, definiert man $I_n = \int_1^e x f^n(x) dx$.

Beweist, dass $I_n = \frac{e^2}{2(\ln 3)^n} - \frac{n}{2 \ln 3} I_{n-1}$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

3. Aufgabe (20 Punkte)

Gegeben sind die Matrizen $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 2026 & 1 \\ 2025 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2026 & 2025 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
und die Menge $\mathbf{G} = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det(X) = 1\}$.

- Prüft, ob A und B zur Menge \mathbf{G} gehören;
- Beweist, dass die Menge \mathbf{G} zusammen mit der Multiplikation der Matrizen eine Gruppe bilden;
- Wenn $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{G}$ eine Lösung der Gleichung $X^2 - X + I_2 = O_2$ ist, dann beweist, dass $a + d = 1$.

4. Aufgabe (20 Punkte)

In einem Experiment wurde beobachtet, dass die Intensität der von einer Quelle erzeugten Strahlung, gemessen an einem Punkt in der Entfernung $a > 0$ zur Quelle, mithilfe der Formel $I(a) = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + a^2} dx$ berechnet werden kann.

- Berechnet den gemessenen Strahlungsintensitätswert an den Punkten, die sich in den Entfernungen $a = 1$ und $a = \sqrt{3}$ zur Quelle befinden;
- Beweist, dass die Funktion $I: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, cu $I(a) = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + a^2} dx$ fallend ist; deutet das Ergebnis physikalisch;
- Beweist, dass: $I(a) > \frac{1}{a^2 + 1}$, für alle $a > 0$.

Notă:

Timp de lucru 3 ore; toate subiectele sunt obligatorii; se acordă 10 puncte din oficiu.

Punctajul maxim este de 100 de puncte.